学校编码：10384　　　　分类号 ______ 密级 ______
学号：200423055　　　　UDC ______

厦门大学

硕 士 学 位 论 文

Beta 算子和 Gamma 算子的逼近性质研究

A research of approximate properties of Beta and Gamma type operators

蔡 清 波

指导教师姓名：曾 晓 明 教授

专 业 名 称：基 础 数 学

论文提交日期：2007 年 4 月

论文答辩日期：2007 年 6 月

学位授予日期：2007 年 　 月

答辩委员会主席：__________

评　　阅　　人：__________

2007 年 4 月

厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其它个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明。本人依法享有和承担由此论文而产生的权利和责任。

声明人（签名）：

年　月　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人完全了解厦门大学有关保留、使用学位论文的规定。厦门大学有权保留并向国家主管部门或其指定机构送交论文的纸质版和电子版，有权将学位论文用于非赢利目的的少量复制并允许论文进入学校图书馆被查阅，有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索，有权将学位论文的标题和摘要汇编出版。保密的学位论文在解密后适用本规定。

本学位论文属于

1、保密（　），在　　　年解密后适用本授权书。

2、不保密（).

（请在以上相应括号内打"✓"）

作者签名：　　　　　　日期：　　年　月　日

导师签名：　　　　　　日期：　　年　月　日

摘　　要

本文研究了 $Beta$ 算子 $\beta_n(f,x)$ 对绝对连续函数和一般有界函数的逼近以及 $Gamma$ 算子 $G_n(f,x)$ 在 L_p 空间中的逼近等价定理。本文由三章组成，其内容如下：

第一章首先对文中出现的定义和记号进行说明，然后介绍了一些相关的研究成果。

第二章引入了本文所要研究的 $Beta$ 算子 $\beta_n(f,x)$，讨论了其对绝对连续函数及一般有界函数的逼近。利用经典的 $Bojanic-Cheng$ 分解方法及分析技巧, 分别对一阶绝对矩 $\beta_n(|t-x|,x)$ 及符号函数 $\beta_n(sign(t-x),x)$ 进行了估计，对两类函数类的逼近阶 $|\beta_n(f,x)-f(x)|$ 的估计得到不错的结果及渐进展开公式。

第三章主要研究了 $Gamma$ 算子在 L_p 空间中的逼近性质，利用了逆定理中常用的插补空间和 $K-$ 泛函及光滑模的方法，建立了整体逼近的等价定理。

关键词：逼近阶； $K-$ 泛函；整体逼近.

Abstract

This paper is studied for the approximation of *Beta* operators $\beta_n(f,x)$ for absolutely continuous functions and bounded funtions, and the global approximation theorem for *Gamma* operators $G_n(f,x)$ in L_p. This paper is organized as following:

In chapter 1 we give an explanation of definitions and marks which were appeared in the paper and then introduce some researchful results.

In chapter 2 we introduce a class of Beta operators $\beta_n(f,x)$, we study the rate of convergence of *Beta* type operators for some absolutely continuous functions and bounded functions, using classical decomposed method of $Bojanic - Cheng$ and analytical ways, we estimate the first order absolute moment $\beta_n(|t-x|,x)$ and sigh functions $\beta_n(sign(t-x),x)$ respectively, we get a better result of the rate of approximation for $|\beta_n(f,x) - f(x)|$ and asymptotic formula.

In chapter 3 The approximation properties of the *Gamma* operators in the spaces $L_p(0,1)$ are discussed. We use the technique of interpolation spaces and characterization of $K-$functional and modulus of smoothness which has been used for inverse theorems. The equivalence theorem concerning the global aproximation by the *Gamma* operators is established.

Key words: Rate of approximation; $K-$functional; Global approximation.

目　　录

Contents

第一章 绪 论

§1.1 基本定义和记号

基本定义和记号

(1) $Beta$ 函数定义为：

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx. \tag{1.1}$$

(2) $Beta$ 算子 $\beta_n(f,x)$ 定义为：

$$\beta_n(f,x)=\int_0^1 \frac{t^{nx}(1-t)^{n(1-x)}}{B(nx+1,n(1-x)+1)}f(t)dt. \tag{1.2}$$

(3) 另一类 $Beta$ 算子 $\beta_n^*(f,x)$ 定义为：

$$\beta_n^*(f,x)=\int_0^1 \frac{t^{nx-1}(1-t)^{n(1-x)-1}}{B(nx,n(1-x))}f(t)dt. \tag{1.3}$$

(4) $Gamma$ 算子 $G_n(f,x)$ 定义为：

$$G_n(f,x)=\frac{1}{x^n\Gamma(n)}\int_0^\infty f(\frac{t}{n})t^{n-1}e^{-t/x}dt. \tag{1.4}$$

显然，以上 $Gamma$ 算子还可以表示为：

$$G_n(f,x)=\frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty f(\frac{tx}{n})t^{n-1}e^{-t}dt. \tag{1.5}$$

若令

$$b_n(x,t)=\frac{n}{x\Gamma(n)}(\frac{tn}{x})^{n-1}e^{-tn/x}, \tag{1.6}$$

则有

$$G_n(f,x)=\int_0^\infty b_n(x,t)f(t)dt. \tag{1.7}$$

(5) 另一类 $Gamma$ 算子 $G_n^*(f,x)$ 定义为：

$$G_n^*(f,x)=\frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^\infty f(\frac{n}{t})t^n e^{-xt}dt. \tag{1.8}$$

(6) 一般有界函数类 Φ_B 定义为：

Φ_B={$f|f$ 是 $[0,1]$ 上的有界函数 }.

(7) 绝对连续函数类 Φ_{DB} 定义为：

Φ_{DB}={$f|f(x)-f(0)$=$\int_0^x\psi(\mathrm{u})\mathrm{du}$; x⩾ 0; ψ 是 $[0,1]$ 上的有界函数 }.

(8) 设 f 是 $[0,1]$ 上的有界函数，引入以下度量：

$$\begin{aligned}\Omega_{x-}(f,\delta_1) &= \sup_{t\in[x-\delta_1,x]}|f(t)-f(x)|,\\ \Omega_{x+}(f,\delta_2) &= \sup_{t\in[x,x+\delta_2]}|f(t)-f(x)|,\\ \Omega_x(f,\lambda) &= \sup_{t\in[x-x/\lambda,x+(1-x)/\lambda]}|f(t)-f(x)|,\end{aligned}$$

这里 x 是 $[0,1]$ 上的定数， $0\leqslant\delta_1\leqslant x$ ， $0\leqslant\delta_2\leqslant 1-x$ ， $\lambda\geqslant 1$ 。

很明显， $\Omega_{x-}(f,\delta_1)$ 、 $\Omega_{x+}(f,\delta_2)$ 和 $\Omega_x(f,\lambda)$ 具有如下性质 [1] ：

(a) $\Omega_{x-}(f,\delta_1)$ 和 $\Omega_{x+}(f,\delta_2)$ 是分别关于 δ_1 和 δ_2 的单调非减函数，$\Omega_x(f,\lambda)$ 是关于 λ 的单调非增函数;

(b) 当 f 分别在 x 点左连续、右连续或连续时，成立

$$\lim_{\delta_1\to 0+}\Omega_{x-}(f,\delta_1)=0,\ \lim_{\delta_2\to 0+}\Omega_{x+}(f,\delta_2)=0,\ \lim_{\lambda\to\infty}\Omega_x(f,\lambda)=0;$$

(c) $\Omega_{x-}(f,\delta_1)\leqslant\Omega_x(f,x/\delta_1)$， $\Omega_{x+}(f,\delta_2)\leqslant\Omega_x(f,(1-x)/\delta_2)$ 。

(9) 设 $1\leqslant p<\infty$ ，权函数 $\varphi(x)=x$ ，

记 D={g: g$\in L_p(0,\infty)$ ， g' 局部绝对连续， $\varphi^2 g''\in L_p(0,\infty)$}.

定义 $K-$ 泛函，对 t>0 ，令

$$K_\varphi(f,t)_p=\inf_{g\in D}\{||f-g||_p+t||\varphi^2 g''||_p\}. \tag{1.9}$$

对于 $f\in L_p(0,\infty)$ ，定义其加权光滑模为

$$\omega_\varphi(f,t)_p=\sup_{0<h\leqslant t}||\triangle_{h\varphi}^2 f||_p, \tag{1.10}$$

其中 $\triangle_h^2 f(x)=\begin{cases} f(x+h)-2f(x)+f(x-h), & x\in(h,\infty) \\ 0, & x\notin(h,\infty). \end{cases}$

§1.2 相关研究成果

一 研究背景

从 20 世纪 50 年代开始，泛函分析方法在逼近论的研究和应用的影响日益增大，形成了逼近论的重要分支——算子逼近论，它将泛函中高度概括的思维方法与古典分析中精致技巧结合起来，使算子逼近论的研究得到迅速发展。开始有 *Bernstein* 算子， *Fejer* 算子出现，发展到一般算子理论处理逼近论问题。

1972 年 *A.Lupas* 在文献 [2] 中引入了 *Beta* 算子 $\beta_n(f,x)$ ，由于 x 不是算子的不动点，使得对它的很多逼近性质的分析计算麻烦了很多。 1991 年 *M.K.Khan* 对其进行了微小修改，在文献 [3] 中定义了新的 *Beta* 算子 $\beta_n^*(f,x)$ ，并给出了一些逼近性质。修改后的 *Beta* 算子 $\beta_n^*(f,x)$ 保持了算子的线性性。我们知道在逼近论中很多正线性算子保持了很好的性质，诸如单调性、凸性等性质 [4] 。此后，很多数学家均对 *Beta* 算子 $\beta_n^*(f,x)$ 的逼近性质进行了研究，曾 [5] 在文献中给出了该算子对一般有界函数和绝对连续函数的逼近，对其一阶绝对矩 $\beta_n^*(|t-x|,x)$ 给出了精确的估计，对绝对连续函数逼近阶的估计得到了最好的结论。本文的第一部分内容就是在此基础上，给出了 *Beta* 算子 $\beta_n(f,x)$ 对特定函数类的逼近。

在算子逼近论中，很多这方面的专家学者均对 *Gamma* 算子的逼近性质做了深入的研究，曾 [6] 在文献中做了 *Gamma* 算子 $G_n(f,x)$ 对局部有界函数类和绝对连续函数类的逼近性质研究，对其一阶绝对矩 $G_n(|t-x|,x)$ 进行直接计算得到了精确的估计，对绝对连续函数类的逼近阶的估计也达到了最优结果。徐 [7] 在此基础上对另一 *Gamma* 算子 $G_n^*(f,x)$ 也进行了类似的分析研究，得出了不错的逼近阶估计。应该说，这两个算子虽然都属于 *Gamma* 算子类，然而不管从他们的形式上还是性质上来分析都有很大的不同。 1994 年杨 [8] 在文献中，给出了 *Gamma* 算子 $G_n^*(f,x)$ 在 L_p 空间中的逼近等价定理，本文的第二部分内容在此基础上，对另一 *Gamma* 算子 $G_n(f,x)$ 给出了类似的逼近等价定理。

二 本文主要内容

本文可分为三章，第一章介绍了相关的定义和记号说明，第二章介绍了 $Beta$ 算子 $\beta_n(f,x)$ 对两类函数类的逼近, 得到了相关逼近阶和渐进展开公式, 第三章介绍了 $Gamma$ 算子 $G_n(f,x)$ 在 L_p 空间中的整体逼近等价定理。

主要工作是做了 $Beta$ 算子 $\beta_n(f,x)$ 对于绝对连续函数类以及一般有界函数类的逼近以及 $Gamma$ 算子 $G_n(f,x)$ 在 L_p 空间中的逼近等价定理。

第二章　Beta 算子对一类函数的逼近

§2.1 Beta 算子对绝对连续函数的逼近

本节主要结论如下：

定理 2.1 设 $f\in\Phi_{DB}$ ，若对于固定的 $x\in(0,1)$ 都有 $\psi(x+)$ 和 $\psi(x-)$ 存在，则当 n 充分大时，有

$$\left|\beta_n(f,x)-f(x)-\tau\sqrt{\frac{x(1-x)}{2\pi n}}\right|\leqslant\frac{2x(1-x)+1}{nx(1-x)}\sum_{k=1}^{[\sqrt{n}]}\Omega_x(\psi_x,1/k)+O(n^{-1}),\tag{2.1}$$

这里 $\tau=\psi(x+)-\psi(x-)$ ， $[\sqrt{n}]$ 表示不超过 $\sqrt{n}$ 的最大整数，

$$\psi_x(u)=\begin{cases}\psi(u)-\psi(x+), & x<u\leqslant 1;\\ 0, & u=x;\\ \psi(u)-\psi(x-), & 0\leqslant u<x.\end{cases}\tag{2.2}$$

为了证明定理 2.1 我们需要以下引理

一　相关引理及证明

引理 **2.1.1** 对 $\forall$ x∈(0,1), 有

$$\beta_n(1,x)=1,\qquad \beta_n(t,x)=x-\frac{2x-1}{n+2},\tag{2.3}$$

$$\beta_n(t^2,x)=\frac{2+3nx+n^2x^2}{(n+2)(n+3)},\quad \beta_n(t-x,x)=\frac{1-2x}{n+2},\tag{2.4}$$

$$\beta_n((t-x)^2,x)=\frac{6x^2-6x+2+n(x-x^2)}{(n+2)(n+3)}\leqslant\frac{1}{n}.\tag{2.5}$$

引理 **2.1.2** 令

$$K_n(x,u)=\frac{1}{B(nx+1,n(1-x)+1)}\int_0^u t^{nx}(1-t)^{n(1-x)}dt.\tag{2.6}$$

若 $y<x$, 则有

$$K_n(x,y)\leqslant\frac{1}{n(x-y)^2}.\tag{2.7}$$

证明：若 $y<x$ ，由式 (2.5) 有

$$\begin{aligned} K_n(x,y) &\leqslant \frac{1}{B(nx+1,n(1-x)+1)}\int_0^y \frac{(x-t)^2}{(x-y)^2}t^{nx}(1-t)^{n(1-x)}dt \\ &\leqslant \frac{\beta_n((x-t)^2,x)}{(x-y)^2} \leqslant \frac{1}{n(x-y)^2}. \end{aligned}$$

通过核函数 $K_n(x,t)$, Beta 算子 β_n 可以表示为 Lebesgue-Stieltjes 的积分形式

$$\beta_n(f,x)=\int_0^1 f(t)d_tK_n(x,t). \tag{2.8}$$

引理 **2.1.3** 对 ∀ x∈(0,1), 有

$$\frac{2\int_0^x (x-t)t^{nx}(1-t)^{n(1-x)}dt}{B(nx+1,n(1-x)+1)}=\sqrt{\frac{2x(1-x)}{\pi n}}+O(n^{-1}). \tag{2.9}$$

证明：令

$$\triangle_1=\int_0^x t^{nx}(1-t)^{n(1-x)}dt, \qquad \triangle_2=\int_0^x t^{nx+1}(1-t)^{n(1-x)}dt,$$

$$\triangle_3=\int_0^x t^{nx}(1-t)^{n(1-x)+1}dt, \qquad \triangle_4=\frac{(1-x)^{n(1-x)+1}x^{nx+1}}{nx+1}.$$

从而有

$$2\int_0^x (x-t)t^{nx}(1-t)^{n(1-x)}dt=2x\triangle_1-2\triangle_2.$$

由分布积分得到

$$\begin{aligned} \triangle_3 &= \frac{1}{nx+1}\int_0^x (1-t)^{n(1-x)+1}dt^{nx+1} \\ &= \frac{(1-x)^{n(1-x)+1}x^{nx+1}}{nx+1}+\frac{n(1-x)+1}{nx+1}\int_0^x t^{nx+1}(1-t)^{n(1-x)}dt \end{aligned}$$

$$=\triangle_4+\frac{n(1-x)+1}{nx+1}\triangle_2. \tag{2.10}$$

记

$$\triangle_2=\int_0^x t^{nx}(1-t)^{n(1-x)}[1-(1-t)]dt=\triangle_1-\triangle_3, \tag{2.11}$$

通过式 (2.10) 、 (2.11) 和一些简单计算，我们有

$$2x\triangle_1-2\triangle_2=2x\triangle_4+\frac{4x-2}{nx+1}\triangle_2.$$

从而

$$\frac{2\int_0^x (x-t)t^{nx}(1-t)^{n(1-x)}dt}{B(nx+1,n(1-x)+1)} = \frac{2x^{nx+2}(1-x)^{n(1-x)+1}}{(nx+1)B(nx+1,n(1-x)+1)} + \frac{4x-2}{nx+1}\frac{\int_0^x t^{nx+1}(1-t)^{n(1-x)}dt}{B(nx+1,n(1-x)+1)}.$$

由计算有

$$\begin{aligned}\frac{4x-2}{nx+1}\frac{\int_0^x t^{nx+1}(1-t)^{n(1-x)}dt}{B(nx+1,n(1-x)+1)} &\leqslant \frac{|4x-2|}{nx+1}\frac{\int_0^1 t^{nx+1}(1-t)^{n(1-x)}dt}{B(nx+1,n(1-x)+1)}\\ &= \frac{|4x-2|}{n+2} = O(n^{-1}).\end{aligned}$$

另一方面，由 Stirling 公式 [10]:

$$\Gamma(z+1) = (\frac{z}{e})^z\sqrt{2\pi z}e^{\theta_z}, \qquad \frac{1}{12z+1} < \theta_z < \frac{1}{12z}.$$

我们有

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(nx+1)\Gamma(n-nx+1)} &= \frac{(n+1)(\frac{n}{e})^n\sqrt{2\pi n}e^{\theta_1}}{(\frac{nx}{e})^{nx}\sqrt{2\pi nx}e^{\theta_2}(\frac{n-nx}{e})^{n-nx}\sqrt{2\pi(n-nx)}e^{\theta_3}}\\ &= \frac{n+1}{x^{nx+\frac{1}{2}}(1-x)^{n-nx+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi n}}e^{\theta_1-\theta_2-\theta_3},\end{aligned}$$

这里 $\frac{1}{12n+1}<\theta_1<\frac{1}{12n}$，$\frac{1}{12nx+1}<\theta_2<\frac{1}{12nx}$，$\frac{1}{12n(1-x)+1}<\theta_3<\frac{1}{12n(1-x)}$.

于是有

$$\begin{aligned}\frac{2x^{nx+2}(1-x)^{n(1-x)+1}}{(nx+1)B(nx+1,n(1-x)+1)} &= \frac{2x^{nx+2}(1-x)^{n-nx+1}}{(nx+1)}\frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(nx+1)\Gamma(n-nx+1)}\\ &= \frac{2x^{nx+2}(1-x)^{n-nx+1}}{(nx+1)}\frac{n+1}{x^{nx+\frac{1}{2}}(1-x)^{n-nx+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi n}}e^{\theta_1-\theta_2-\theta_3}\\ &= \frac{nx+x}{nx+1}\frac{\sqrt{2x(1-x)}}{\sqrt{\pi n}}e^{\theta_1-\theta_2-\theta_3}\\ &= \sqrt{\frac{2x(1-x)}{\pi n}} + O(n^{-1}).\end{aligned}$$

从而证明了引理。

二　定理的证明

由式 (2.3) 、 (2.8) 以及 Φ_{DB} 的定义，我们可以得到

$$\begin{aligned}\beta_n(f,x)-f(x) &= \int_0^1[f(t)-f(x)]d_tK_n(x,t)\\ &= \int_0^1\left(\int_x^t\psi(u)du\right)d_tK_n(x,t).\end{aligned}$$

由 Bojanic-Cheng 的分解方法 [12] ，有

$$\begin{aligned}\psi(u)=\frac{\psi(x+)+\psi(x-)}{2}+\psi_x(u)+\frac{\psi(x+)-\psi(x-)}{2}\mathrm{sgn}(u-x)\\ +\delta_x(u)\left[\psi(x)-\frac{\psi(x+)+\psi(x-)}{2}\right],\end{aligned}\tag{2.12}$$

这里 $\psi_x(u)$ 如 (2.2) 所定义， $\mathrm{sgn}(u)$ 是一个符号函数， $\delta_x(u)=\begin{cases}1, & u=x\\ 0, & u\neq x\end{cases}$.

直接计算可以得到

$$\begin{aligned}\beta_n(f,x)-f(x)=\frac{\psi(x+)-\psi(x-)}{2}\beta_n(|t-x|,x)\\ -R_{n,x}(\psi_x)+T_{n,x}(\psi_x)+\frac{\psi(x+)+\psi(x-)}{2}\beta_n(t-x,x),\end{aligned}\tag{2.13}$$

这里

$$\begin{aligned}R_{n,x}(\psi_x) &= \int_0^x\left(\int_t^x\psi_x(u)du\right)d_tK_n(x,t),\\ T_{n,x}(\psi_x) &= \int_x^1\left(\int_x^t\psi_x(u)du\right)d_tK_n(x,t).\end{aligned}$$

由分布积分，有

$$\begin{aligned}R_{n,x}(\psi_x) &= \int_0^x\left(\int_t^x\psi_x(u)du\right)d_tK_n(x,t)\\ &= \int_t^x\psi_x(u)duK_n(x,t)\Big|_0^x+\int_0^xK_n(x,t)\psi_x(t)dt\\ &= \int_0^xK_n(x,t)\psi_x(t)dt\\ &= \left(\int_0^{x-x/\sqrt{n}}+\int_{x-x/\sqrt{n}}^x\right)K_n(x,t)\psi_x(t)dt.\end{aligned}$$